ÜBER DIE BOSE-STATISTIK IN DER RELATIVITÄTSTHEORIE

Von F. BERENCZ
Institut für Theoretische Physik der Universität Szeged

(Eingegangen am 15. Juni, 1960)

Es wird das relativistische, entartete, idealisierte Korpuskelgas in der BOSE-Statistik behandelt. In den Fällen verschiedener Entartungen — $A<1$ und $A=1$ — werden die gesamte Energie des Systems und die Zustandgleichung angegeben. Es wurde weiterhin festgestellt, daß die bekannte Formel für den Gasdruck in der EINSTEINschen Gastheorie: $p=\frac{2}{3}\frac{u-u_0}{V}$ beim relativistischen, entarteten Gase nicht gültig ist.

1. *Einleitung*

W. GLASER [1] und D. S. KOTHARI—B. N. SING [2] haben sich mit der Untersuchung eines der BOSE-Statistik unterliegenden, relativistischen Korpuskelgases beschäftigt. Sie haben festgestellt, daß bei vollständiger Entartung die Teilchendichte eines idealen Gases von relativistischen Korpuskeln verschwindender Ruhmasse einen maximalen Wert annimmt und beim Überschreiten dieses maximalen Wertes sich der Überschuß des Gases nach der EINSTEINschen Annahme kondensiert und mit seinem Kondensat in thermodynamischen Phasengleichgewicht stehen wird. Die Gesetze des Dampfdruckes dieses gesättigten idealen Gases gehen in die Gesetze der Hohlraumstrahlung über.

Beim Angeben der Zustandgleichung benutzen diese Verfasser HANKELsche Funktionen als Lösungen der BESSELschen Differentialgleichung. In dieser Arbeit wird die gesamte Energie und die Zustandgleichung des Systems in der Form einer Potenzreihe angegeben. Diese Gleichungen werden in den Fällen $A<1$ und $A=1$ für endliche und verschwindende Ruhmasse aufgeschrieben und so wird festgestellt, daß die bekannte Formel für den Gasdruck in der EINSTEINschen Gastheorie: $p=\frac{2}{3}\frac{u-u_0}{V}$ beim relativistischen, entarteten Gase nicht gültig ist.

2. *Die relativistische* BOSE-*Statistik*

Betrachten wir ein idealisiertes Korpuskelgas von Volumen V und der Temperatur T. Die relativistische BOSEsche Zustandgleichung hat nach den obigen Verfassern die folgende Form:

$$dn = n(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\,\frac{\varepsilon(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}d\varepsilon}{\frac{\exp(\varepsilon/kT)}{A}-1}, \tag{1}$$

wo ε die Energie eines Teilchens, ε_0 die Ruhenergie und $A=\exp(-\alpha)$ den Entartungsparameter bedeuten. (1) gibt übrigens die Anzahl der Teilchen im V mit Energien zwischen ε und $\varepsilon+d\varepsilon$ an. Da dn immer positiv sein muß und ε/kT beliebig kleine Werte annehmen kann, darf A sich zwischen null und 1 ändern. Wenn $A=1$ erreicht wird, sagt man, das Gas ist vollständig entartet.

Wenn man annimmt, daß zwischen den Gasmolekeln keinerlei Kräfte wirken, ist die gesamte Energie des betrachteten Systems:

$$U = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}d\varepsilon}{\frac{\exp(\varepsilon/kT)}{A}-1} = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}A\exp(-\varepsilon/kT)d\varepsilon}{1-A\exp(-\varepsilon/kT)}. \tag{2}$$

Da die Ruhenergie im allgemeinen einen sehr kleinen Wert hat, kann man annehmen, daß $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\ll 1$ ist und so kann man die $(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}=\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2}\right)\sim\varepsilon-\frac{\varepsilon_0^2}{2}$ Substitution vollenden:

$$U = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{\frac{\exp(\varepsilon/kT)}{A}-1} - \frac{2\pi V\varepsilon_0^2}{h^3c^3}\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\frac{\varepsilon d\varepsilon}{\frac{\exp(\varepsilon/kT)}{A}-1}. \tag{3}$$

Im Falle $A\leqq 1$ läßt sich der Integrand in folgende Potenzreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} U &= \frac{4\pi V}{h^3c^3}\sum_{l=1}^{\infty}A^l\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\varepsilon^3\exp\left(-\frac{l\varepsilon}{kT}\right)d\varepsilon - \\ &\quad -\frac{2\pi V\varepsilon_0^2}{h^3c^3}\sum_{l=1}^{\infty}A^l\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\varepsilon\exp\left(-\frac{l\varepsilon}{kT}\right)d\varepsilon = \\ &= \frac{4\pi V}{h^3c^3}(kT)^4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{l^4}B_l' - \frac{2\pi V\varepsilon_0^2}{h^3c^3}(kT)^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{l^2}B_l'', \end{aligned} \tag{4}$$

wo

$$B_l' = \exp\left(-\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)\left[\left(\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)^3 + 3\left(\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)^2 + 6\left(\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right) + 6\right], \tag{5}$$

$$B_l'' = \exp\left(-\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)\left[\left(\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right) + 1\right]$$

sind.

Im Falle verschwindender Ruhmasse ist:

$$U = \frac{24\pi V}{h^3c^3}(kT)^4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{A^l}{l^4}. \tag{6}$$

Zur Bestimmung der relativistischen Zustandgleichung gehen wir von der BERNOULLIschen Gleichung des Gasdruckes aus [3]:

$$p = \frac{1}{3}\varrho m \overline{v^2}, \tag{7}$$

wo ϱ die Anzahl der Teilchen pro cm^3 bedeutet. Auf Grund $V\varrho d\varepsilon = dn$ kann (7) in folgender Weise verallgemeinert werden:

$$pV = \frac{1}{3}\int m v^2 dn. \tag{8}$$

Aber

$$m v^2 = \frac{m_0 v^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon} \tag{9}$$

und so ist:

$$p = \frac{4\pi}{3h^3c^3}\int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{3/2} d\varepsilon}{\frac{\exp(\varepsilon/kT)}{A} - 1} = \frac{4\pi}{3h^3c^3}\int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{3/2} A \exp(-\varepsilon/kT) d\varepsilon}{1 - A\exp(-\varepsilon/kT)}. \tag{10}$$

Mit partieller Integration erhält man

$$p = -\frac{4\pi kT}{h^3c^3}\int_{\varepsilon_0}^{\infty} \log[1 - A\exp(-\varepsilon/kT)]\varepsilon(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{1/2} d\varepsilon, \tag{11}$$

da

$$\left[(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{3/2} kT \log(1 - A\exp(-\varepsilon/kT))\right]_{\varepsilon_0}^{\infty} = 0 \text{ ist.} \tag{12}$$

Gemäß der Gleichung

$$\log[1 - A\exp(-\varepsilon/kT)] = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{A^l}{l} \exp\left(-\frac{l\varepsilon}{kT}\right) \tag{13}$$

folgt:

$$p=\frac{4\pi}{h^3c^3}(kT)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{l}\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\varepsilon^2\exp\left(-\frac{l\varepsilon}{kT}\right)d\varepsilon-$$

$$-\frac{2\pi\varepsilon_0^2}{h^3c^3}(kT)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{l}\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\exp\left(-\frac{l\varepsilon}{kT}\right)d\varepsilon= \tag{14}$$

$$=\frac{4\pi}{h^3c^3}(kT)^4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{l^4}C_l'-\frac{2\pi\varepsilon_0^2}{h^3c^3}(kT)^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{l^2}C_l'',$$

wo

$$C_l'=\exp\left(-\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)\left[\left(\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)^2+2\left(\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)+2\right], \tag{15}$$

$$C_l''=\exp\left(-\frac{l\varepsilon_0}{kT}\right)$$

sind.

Im Falle verschwindender Ruhmasse ergibt sich:

$$p=\frac{8\pi}{h^3c^3}(kT)^4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{l^4}. \tag{16}$$

Mit vergleichen (6) mit (12) erhalten wir die folgende Gleichung

$$p=\frac{U}{3V}. \tag{17}$$

Wenn das Gas vollständig entartet ist, nehmen dieselben Gleichungen die folgende Form an:

$$U=\frac{4\pi V}{h^3c^3}(kT)^4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^4}B_l'-\frac{2\pi V\varepsilon_0^2}{h^3c^3}(kT)^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}B_l'', \tag{18}$$

$$p=\frac{4\pi}{h^3c^3}(kT)^4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^4}C_l'-\frac{2\pi\varepsilon_0^2}{h^3c^3}(kT)^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}C_l''. \tag{19}$$

Wegen

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^4}=\frac{\pi^2}{90}\quad\text{und}\quad\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{20}$$

erhalten wir, wenn die Ruhmasse außerordentlich klein ist, folgende Gleichungen:

$$U=\frac{4\pi^5V}{15h^3c^3}(kT)^4, \tag{21}$$

$$p=\frac{4\pi^5}{45h^3c^3}(kT)^4, \tag{22}$$

das heißt

$$p=\frac{U}{3V}. \tag{23}$$

Auf Grund unserer Gleichungen können wir feststellen, daß die bekannte Formel für den Gasdruck in der EINSTEINschen Gastheorie: $p=\frac{2}{3}\frac{U-U_0}{V}$ beim relativistischen, entarteten Gase nicht gültig ist.

* * *

Ich danke auch an dieser Stelle Herrn Dr. J. I. HORVÁTH für die Durchsicht des Manuskriptes und für seine wertvollen Ratschläge.

Literatur

[1] *Glaser, W.:* Z. Phys. **94**, 317, 677 (1935).
[2] *Kothari, D. S., B. N. Sing:* Proc. Roy. Soc. **178**, 135 (1941).
[3] *Becker, R.:* Theorie der Wärme (Springer, Berlin, 1955), S. 69.

ЗАМЕЧАНИЯ О РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ БОЗЕ

Ф. Беренц

Был исследован вырожденный идеальный газ по статистике *Бозе*. В случае различных вырожденный, т. е. $A<1$ и $A=1$, были даны уравнение состояния и энергия системы. Кроме того было установлено, что закон газа $p=\frac{2}{3}\frac{u-u_0}{V}$, известный по теории газа *Эйнштейна*, для релятивистического вырожденного газа недействителен.